

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 519.216;519.216.21;519.216.3

Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов

М. М. Дубовиков*, А. В. Крянев[†], Н. В. Старченко*

* ЗАО «Финансовая компания Интраст»
Россия, 109004, Москва, Б. Коммунистическая, д. 36, стр. 1

[†] МИФИ
Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

На основе минимальных покрытий вводятся новые фрактальные характеристики: размерность минимального покрытия D_μ и индекс вариации μ тесно связанный с D_μ . Использование этих показателей расширяет сферу применимости фрактального анализа при изучении самых различных природных, социальных и технологических процессов. В частности, для случаев финансовых временных рядов показано, что минимальный масштаб τ_μ , необходимый для определения μ с приемлемой точностью, на два порядка меньше соответствующего масштаба для определения показателя Херста H . Это позволяет рассматривать введенные характеристики в качестве локальных и установить связь между локальным значением μ и стабильностью временного ряда в этой локальной области. Предложено новое выражение для мультифрактального спектра $\zeta(q)$ и дано обобщение представленного локального анализа для случая многомерных фрактальных функций.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: финансовые временные ряды, фракталы, мультифракталы, локальный фрактальный анализ, минимальное покрытие.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время фрактальный анализ с успехом применяется в самых различных областях физики, химии, биологии, лингвистики, музыки, изобразительного искусства и т.д. [1–6]. Это, видимо, связано с тем, что любые достаточно сильные нерегулярности в природе стремятся обрести самоподобие (инвариантность относительно изменения масштаба), или, что тоже самое, фрактальность. Основной характеристикой самоподобных структур, как известно, является фрактальная размерность D , введенная Хаусдорфом еще в 1919 году для компактного множества в произвольном метрическом пространстве [7]. Термин же «фрактал» и соответствующие производные от него был предложен Мандельбротом уже значительно позднее [1].

Согласно Хаусдорфу

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln N(\delta) / \ln(1/\delta)] \quad (1)$$

где $N(\delta)$ — минимальное количество шаров радиуса δ , покрывающих это множество. Чтобы понять мотивацию этого определения, умножим обе части (1) на $\ln(1/\delta)$ и введем D под знак логарифма. В результате получим:

$$(1/\delta)^D \sim N(\delta) \quad (2)$$

Поскольку для покрытия, например, единичного отрезка, квадрата или куба его копиями размера δ , их потребуется соответственно $1/\delta$, $1/\delta^2$ и $1/\delta^3$, то возникающий здесь показатель степени можно понимать как размерность, что и отражает формула (1). Заметим, что если исходное множество погружено в евклидово

пространство, то вместо покрытий этого множества шарами, можно брать любые другие его аппроксимации простыми фигурами (например, клетками) с геометрическим фактором (линейным размером) δ . При этом, наряду с исходной сферической размерностью D , появляются новые фрактальные размерности (клеточная, внутренняя и т.д.), которые, как предельные значения при $\delta \rightarrow 0$, обычно совпадают с D . Однако скорость сходимости к этому пределу для таких размерностей может быть разной. Поскольку на практике размерность вычисляется на основе конечного числа аппроксимаций, то правильный выбор последних может иметь принципиальное значение. В каждом конкретном случае подобный выбор является в определенном смысле искусством.

Настоящая работа посвящена анализу фрактальной геометрии графиков временных функций (временных рядов). Как известно, подобную геометрию имеют реализации большинства наблюдаемых в природе и обществе динамических процессов [4, 5]. Если в качестве аппроксимации таких графиков рассматривать комплексы, состоящие из двумерных простых фигур (например, клеток) с геометрическим фактором δ , то, как следует из формулы (1), размерность D определяется из закона

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (3)$$

где $S(\delta)$ — полная площадь комплекса с масштабом разбиения δ . Между тем, на практике, при попытке вычислить D непосредственно из формулы (3), возникает определенная проблема. Она связана с тем, что, с одной стороны, реальные временные ряды всегда имеют минимальный масштаб структуры δ_0 , с другой же стороны, для известных аппроксимаций приближение к асимптотическому режиму (3) обычно является слишком медленным. По этой причине для определения D обычно вычисляют показатель Херста H , который для гауссовых процессов связан с D соотношением $H = 2 - D$. Однако для надежного вычисления H требуется слишком большой репрезентативный масштаб, содержащий несколько тысяч данных [2]. Внутри этого масштаба временной ряд, как правило, много раз меняет характер своего поведения. Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда необходимо определить размерность D локально (т.е. на масштабах порядка характерного масштаба основных динамических состояний процесса). Для этого необходимо найти последовательность аппроксимаций, которая давала бы достаточно быстрый выход функции $S(\delta)$ на асимптотический режим (3). Чтобы понять, как может быть устроена эта последовательность, обратимся к некоторым модельным фракталам, таким, например, как ковер Серпинского. Соответствующие аппроксимации для таких фракталов представляют собой минимальные покрытия. Если мы построим для таких покрытий функцию $S(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе, то получим строго прямую линию. Это означает, что в этом случае $S(\delta)$ выходит на асимптотический режим, начиная с максимально возможного δ . С другой стороны, если мы построим аналогичный график $S(\delta)$ для других систем покрытий, то соответствующие точки уже не будут так хорошо ложиться на одну прямую. Это наводит на мысль, что использование минимальных покрытий может давать подобный эффект и для фрактальных функций. Ниже мы покажем, что для временных рядов, характеризующих реальные хаотические процессы, это видимо действительно так. В качестве примера мы рассмотрим финансовые временные ряды. Предварительно во втором разделе анализируются фрактальные структуры как модельные (ковер Серпинского), так и природные (береговая линия). Как те, так и другие имеют свою особую специфику, которая проявляется на этих примерах. Данный раздел носит вспомогательный характер и вводит в круг тех представлений, которые позволяют понять основную часть работы. В третьем разделе на основе минимальных покрытий мы вводим вариацию $V_f(\delta)$, а также новые фрактальные характеристики — индекс вариации μ и размерность минимального покрытия D_μ , тесно связанную с μ . Доказывается, что размерность D_μ совпадает с клеточной размерностью D_C . В четвертом разделе на основе вариации $V_f(\delta)$ и индекса μ мы анализируем ценовые ряды акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. В результате оказывается, что $V_f(\delta)$ для этих рядов имеет быстрый выход на асимптотику. Это приводит к

тому, что для определения μ с приемлемой точностью требуется данных на два порядка меньше, чем для определения, например, показателя Херста H . В пятом разделе мы сравниваем точности определения показателей μ и H на основе одних и тех же данных и показываем, что μ определяется намного более точно. В шестом разделе индекс μ рассматривается как локальный показатель, характеризующий состояние исходного процесса и вводится функция $\mu(t)$. Затем на основе численных данных устанавливается эмпирическая зависимость между локальным значением μ и стабильностью процесса в этой области. Теоретическое обоснование этой зависимости приводится для случая гауссовских случайных процессов. В заключительном разделе подводятся основные итоги, а также перечисляются пути дальнейшего развития и области возможного применения изложенных в работе идей.

2. ФРАКТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Знакомство с фрактальными структурами мы начнем с модельных фракталов. В качестве примера рассмотрим ковер Серпинского. Именно в силу своей простоты этот пример, с одной стороны, проясняет свойство фрактальности в наиболее «чистом» виде, а с другой, показывает, как в принципе устроены более сложные фракталы (множества Жюлиа и Мандельброта, кривые Пеано и т.д.). Кроме того, указанный пример дает правильное представление о том, как следует строить оптимальные последовательности аппроксимаций для фрактальных функций. Ковер Серпинского строится с помощью итеративной процедуры. На нулевом шаге берется единичный квадрат (рис. 1).

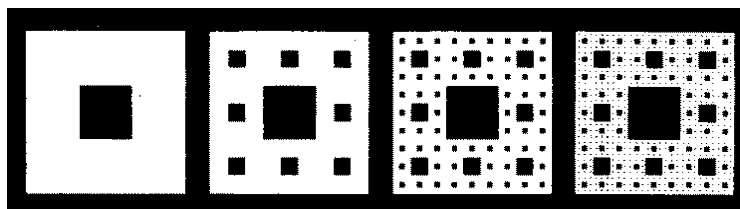


Рис. 1. Ковер Серпинского на первых четырех шагах итерации

На первом — этот квадрат делится на девять равных квадратов и выбрасывается средний. Далее на каждом следующем шаге эта процедура повторяется со всеми оставшимися квадратами. Множество, которое получается в пределе такой итеративной процедуры, называется ковром Серпинского. Для вычисления фрактальной размерности этого множества в качестве n -й аппроксимации используем его представление на n -м шаге итерации (предфрактал n -го поколения). В этом случае оно будет покрыто 8^n квадратами, уменьшенными в 3^n раз. Отметим, что только такая аппроксимация является минимальным покрытием ковра Серпинского при $\delta = (1/3)^n$. При этом $N(\delta) = 8^n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ по формуле (1), получаем $D = \ln 8 / \ln 3 (\approx 1.89)$

Перейдем теперь к природным фракталам. Их общую специфику мы поясним на примере береговой линии, тем более, что этот пример представляет исторический интерес. Именно здесь впервые была обнаружена закономерность, впоследствии осмысленная как фрактальность. В работе известного английского метеоролога и картографа Ричардсона [8] (вышедшей уже после его смерти в 1961 г.) с помощью последовательности все более точных карт измерялся периметр береговой линии Великобритании. Данные наносились на график, где по осям x и y откладывались, соответственно, логарифмы масштабного фактора карты m и периметра $P(m)$. Результат оказался поразительным. Данные почти точно легли на прямую линию (рис. 2). Это означает, что благодаря «довескам», которые появляются по мере уменьшения масштабного фактора карты, периметр «расходится» (т.е. $P(m) \rightarrow \infty$

при $m \rightarrow 0$) и, причем, по степенному закону. Отсюда следует, что береговая линия имеет фрактальную размерность.

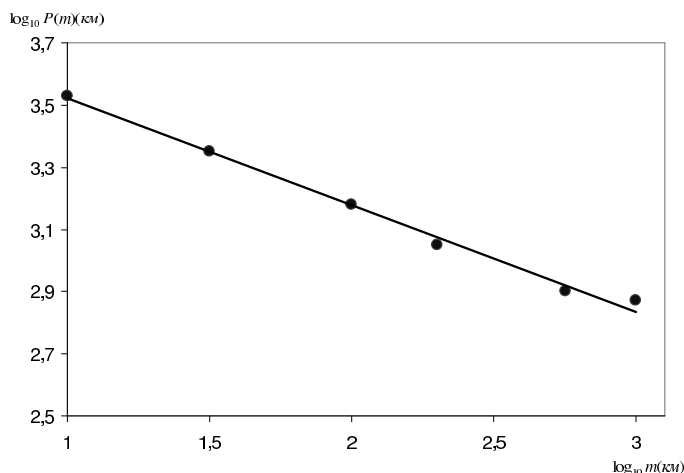


Рис. 2. Зависимость длины береговой линии $P(m)$ от масштабного фактора карты m в двойном логарифмическом масштабе

Действительно, поскольку масштабный фактор карты m прямо пропорционален минимальному различимому размеру δ («разрешению» карты), то измерение периметра с помощью последовательности все более точных карт можно представлять как измерение с помощью последовательности все более точных аппроксимаций береговой линии ломаными с размером звена δ . Тогда выполнение степенного закона при переходе к более точным картам просто означает:

$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha}, \quad (4)$$

где $P(\delta)$ — периметр, соответствующий разрешению δ , α — константа. Если теперь учесть, что $P(\delta) = N(\delta)\delta$, где $N(\delta)$ — число звеньев ломаной линии, аппроксимирующей периметр, то получим выражение:

$$N(\delta) \sim \delta^{-(\alpha+1)}, \quad (5)$$

откуда сразу следует, что береговая линия — фрактал с размерностью $D = \alpha + 1$ (см. формулу (2)).

Характеризуя природные фракталы, следует отметить, что если вещество не находится в газообразном или кристаллическом состоянии, то оно имеет на некотором интервале масштабов фрактальную структуру. Наглядно фрактальность проявляется в необычном распределении массы фрактального агрегата в пространстве:

$$M(L) = (L/l)^D m, \quad (6)$$

где $D < 3$. Здесь M и L — масса и размер агрегата, m и l — масса и размер составляющих агрегат частиц, D — так называемая массовая фрактальная размерность. Соответствующее выражение для плотности вещества ρ имеет вид:

$$\rho(L) = (L/l)^{D-D_0} \rho_0, \quad (7)$$

где ρ_0 — плотность составляющих агрегат частиц, D_0 — размерность объемлющего пространства, которая в зависимости от задачи может принимать значения 1, 2 или 3; причем всегда $D_0 \geq D$. При плотной упаковке $D = D_0$ и $\rho = \text{const}$. Заметим, что

для фрактальных агрегатов обычно измерению доступна корреляционная функция плотности $C(\vec{R}) = \langle \rho(\vec{r} + \vec{R}) \rho(\vec{r}) \rangle$. Фрактальность в данном случае означает, что

$$C(\vec{R}) \sim R^{D-D_0}, \quad (8)$$

где $R = |\vec{R}|$, $D < D_0$.

Исходя из рассмотренных примеров, отметим основные особенности всех природных фракталов в их отличии от модельных.

Во-первых, свойство самоподобия для них выполняется, как правило, лишь «в среднем».

Во-вторых, при вычислении фрактальной размерности степенной закон проявляет себя как «промежуточная асимптотика» (т.е. при $\delta \rightarrow 0$ берется масштаб, малый по сравнению с некоторым характерным, но много больше некоторого минимального). При этом сама размерность вычисляется по углу наклона соответствующей зависимости в двойном логарифмическом масштабе (или масштабе относительных приростов), и часто особую роль здесь играет «искусство» правильного выбора системы аппроксимаций.

В-третьих, иногда самоподобную структуру в наиболее «чистом виде» выявляет не фрактальная размерность, а связанная с ней простым соотношением величина, которая характеризует степень «расходимости» некоторой «естественной» для данного объекта характеристики (в примере с береговой линией — это периметр).

В следующих разделах мы рассмотрим фрактальные временные ряды, которые являются важнейшим классом природных фракталов.

3. ИНДЕКС ВАРИАЦИИ И РАЗМЕРНОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ

Рассмотрим график вещественной непрерывной функции $y = f(t)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$. Введем равномерное разбиение отрезка

$$\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad \delta = (b - a)/m \quad (9)$$

и построим минимальное покрытие функции в классе покрытий, состоящих из прямоугольников с основанием δ (рис. 3).

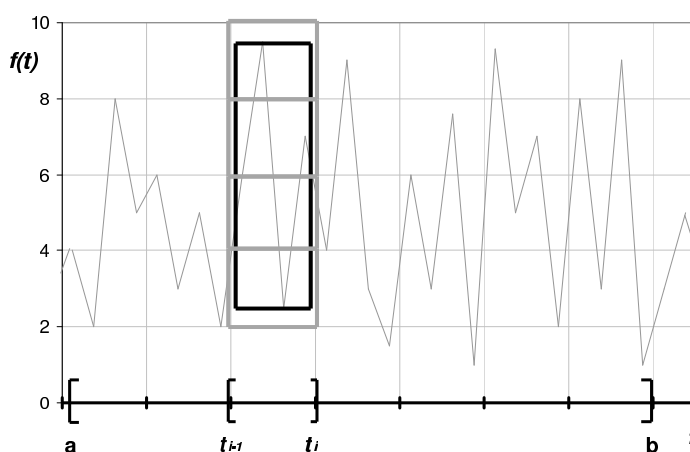


Рис. 3. Минимальное (черный прямоугольник) и клеточное (серый прямоугольник) покрытия функции $f(t)$ на интервале $[t_{i-1}, t_i]$, длины δ

Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, которая является разностью между максимальным и минимальным значением функции на этом отрезке. Введем величину

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta) \quad (10)$$

и назовем $V_f(\delta)$ вариацией функции $f(t)$, соответствующей масштабу разбиения δ на отрезке $[a, b]$. Тогда полную площадь минимального покрытия $S_\mu(\delta)$ можно записать в виде

$$S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta \quad (11)$$

Поэтому из (1) следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (12)$$

где

$$\mu = D_\mu - 1. \quad (13)$$

Назовем показатель μ индексом вариации, а размерность D_μ — размерностью минимального покрытия. Чтобы соотнести D_μ с другими размерностями и, в частности, с клеточной размерностью D_C построим клеточное разбиение плоскости графика функции как показано на рис. 3.

Пусть $N_i(\delta)$ — число клеток, покрывающих график внутри отрезка $[t_{i-1}, t_i]$. Тогда из рис. 3 видно, что,

$$0 \leq N_i(\delta)\delta^2 - A_i(\delta)\delta \leq 2\delta^2. \quad (14)$$

Разделим это соотношение на δ и просуммируем по i с учетом (10). В результате получим

$$0 \leq N(\delta)\delta - V_f(\delta) \leq 2(b-a), \quad (15)$$

где $N(\delta) = \sum N_i(\delta)$ есть полное число клеток размера δ , покрывающих график функции на отрезке $[a, b]$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, с учетом (12) и (13), получим:

$$N(\delta)\delta \sim V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} = \delta^{1-D_\mu}. \quad (16)$$

С другой стороны, согласно (3)

$$N(\delta)\delta = S_c(\delta)\delta^{-1} \sim \delta^{1-D_c}. \quad (17)$$

Следовательно $D_c = D_\mu$. Отметим, однако, что для реальных фрактальных функций минимальные и клеточные покрытия могут давать различные приближения величины $S(\delta)$ к асимптотическому режиму (3), причем величина этого различия может быть весьма значительной.

4. ИНДЕКС ВАРИАЦИИ И ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Наиболее популярными представителями фрактальных временных функций являются финансовые временные ряды. Фрактальная структура этих рядов хорошо известна и, по словам Мандельброта, есть «переформулировка известной рыночной поговорки, что движения акций или валют вполне похожи, независимо от масштаба времени и цены. Наблюдатель не может сказать по внешнему виду графика, относятся ли данные к недельным, дневным или же часовым изменениям» [9]. Кроме того, существует надежное численное подтверждение фрактальной структуры финансовых временных рядов [10–17]. Теоретически же фрактальность обычно

связывают с тем, что для устойчивости рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временном интервале [18].

С помощью индекса μ нами были исследованы ценовые ряды акций тридцати компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index), с 1970 по 2002 год. Каждый ряд содержит 8145 записей. Каждая запись соответствует одному торговому дню и содержит информацию о четырех ценах за день: открытия, минимальной, максимальной и закрытия. В литературе финансовые ряды обычно изображают с использованием т.н. «японских свечей». Фрагмент такого ряда для компании Coca-Cola представлен на рис. 4. В финансах графики цен принято изображать не одномерными линиями, а интервалами (т.н. баровые графики или графики в виде японских свечей). Один прямоугольник (называемый телом свечи) с двумя штрихами сверху и снизу (называемыми тенями свечи) изображает колебания цен в течение дня. Верхняя точка верхней тени показывает максимум цены, нижняя точка нижней тени — минимум цены за день. Верхняя и нижняя границы тела свечи показывают цену открытия и закрытия торгов. При этом, если тело белого (черного) цвета, то закрытие выше (ниже) открытия.

Для простоты анализа ограничимся последними $2^{12} = 4096$ записями для каждой компании. При вычислении индекса μ мы использовали последовательность m вложенных разбиений ω_m (9), где $m = 2^n$; $n = 0, 1, 2, \dots, 12$. Каждое разбиение состояло из 2^n интервалов, содержащих 2^{12-n} торговых дней. Для каждого разбиения ω_m вычислялась вариация $V_f(\delta)$ (10). Здесь $A_i(\delta)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ (в частности, если $\delta = \delta_0$, то $A_i(\delta)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой за день).

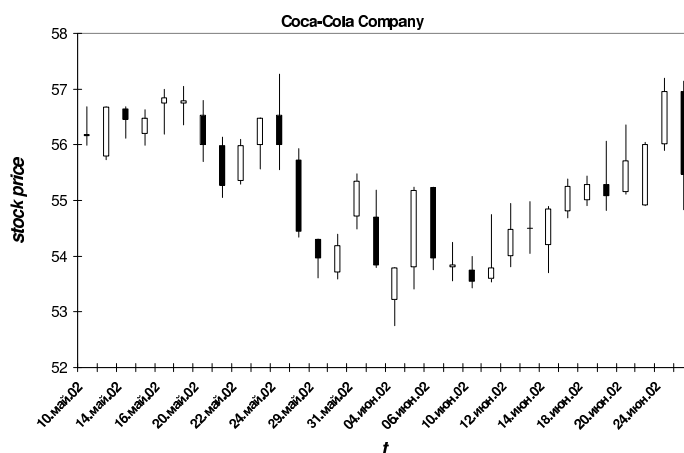


Рис. 4. Типичное поведение цен на интервале 32 дня (использован дневной график цен акций компании Coca-Cola).

Типичный пример поведения $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе представлен на рис. 5 для компании Microsoft. Мы видим, что данные почти точно ложатся на прямую линию, кроме двух последних точек, где линейный режим имеет излом. Для определения значения μ по этим данным следует исключить две последние точки, найти линию регрессии $y = ax + b$ с помощью метода наименьших квадратов (МНК) и отождествить $\mu = -a$. При уровне надежности $\alpha = 0.95$ в приведенном примере $\mu = 0.472 \pm 0.008$, $R^2 = 0.999$. Здесь R^2 — коэффициент детерминации для линии регрессии.

Результаты для остальных компаний следующие:

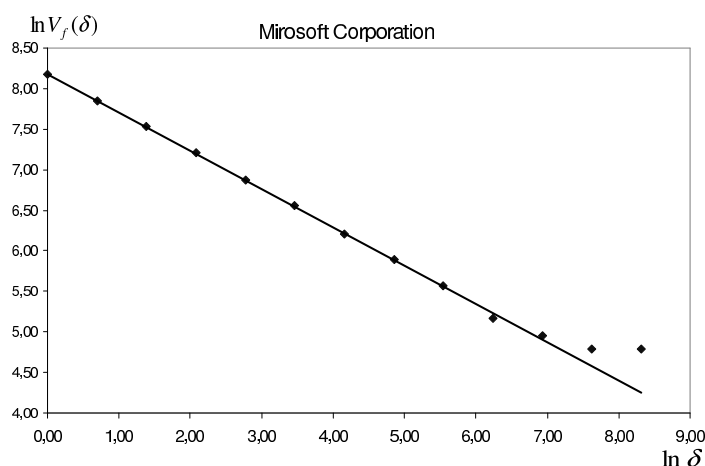


Рис. 5. РЕЗУЛЬТАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНДЕКСА ВАРИАЦИИ ДЛЯ ВРЕМЕННОГО РЯДА ЦЕН АКЦИЙ КОМПАНИИ MICROSOFT НА ИНТЕРВАЛЕ 4096 ДНЕЙ. ПРЯМАЯ $y = ax + b$ ОПРЕДЕЛЯЛАСЬ МЕТОДОМ МНК ПО ВСЕМ ТОЧКАМ, ИСКЛЮЧАЯ ДВЕ ПОСЛЕДНИЕ.

$$\mu_{\min} = 0.469 \pm 0.019, R^2 = 0.999 \text{ (Intel Corporation);}$$

$$\mu_{\max} = 0.532 \pm 0.007, R^2 = 0.997 \text{ (International Paper Company).}$$

Отметим, что для каждой из 30 компаний график $V_f(\delta)$ почти точно ложится на прямую также на всех меньших репрезентативных интервалах вплоть до 32-х, а иногда даже до 16-ти дней. При этом на интервалах меньших, чем 500 дней излом линейной части графика, как правило, исчезает. Типичный пример $V_f(\delta)$ на интервале 32 дня представлен на рис. 5. При $\alpha = 0.95$ мы получаем $\mu = 0.571 \pm 0.071, R^2 = 0.992$. Заметим, что для определения показателя Херста H с приемлемой точностью требуется обычно несколько тысяч данных [2].

5. СРАВНЕНИЕ ИНДЕКСА ВАРИАЦИИ С ПОКАЗАТЕЛЕМ ХЕРСТА

Как известно, показатель Херста H определяется на основе предположения, что

$$\langle |f(t + \delta) - f(t)| \rangle \sim \delta^H \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (18)$$

где угловые скобки означают усреднение по временному интервалу. Чтобы сравнить индекс μ с H , введем следующее естественное определение средней амплитуды $\langle A(\delta) \rangle$ на разбиении ω_m (см. (9), (10)):

$$\langle A(\delta) \rangle \equiv m^{-1} \sum_{i=1}^m A_i(\delta). \quad (19)$$

Умножим (10) на $m^{-1} \sim \delta$ и подставим в (12). Получим:

$$\langle A(\delta) \rangle \sim \delta^{H_\mu} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (20)$$

где

$$H_\mu \equiv 1 - \mu. \quad (21)$$

Как известно (см., например, [2]), если $f(t)$ реализация гауссовского случайного процесса, то показатель H связан с размерностью D , а следовательно и с индексом μ соотношением

$$H = 2 - D_\mu = 1 - \mu. \quad (22)$$

Следовательно, в этом случае $H = H_\mu$. Однако реальные финансовые ряды, как правило, не являются гауссовыми (см., например, [19, 20]) и поэтому H_μ и H могут сильно различаться. Действительно, в формуле (20) мы имеем степенной закон для средней амплитуды функции на интервале длиной δ , в то время как в формуле (18) мы имеем степенной закон для средней разности между начальным и конечным значением на том же интервале. Кроме того, как мы показали на основе большого количества численных данных (см. [21]), индекс μ вычисляется гораздо более точно, чем H . В качестве типичного примера на рис. 6, 7 мы представляем результаты вычисления H и μ на основе одних и тех же данных, показанных на рис. 4.

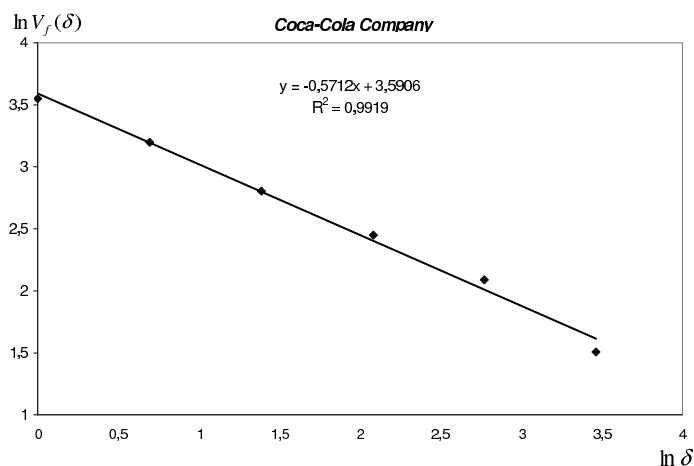


Рис. 6. РЕЗУЛЬТАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе для временного ряда, представленного на рис. 4. Прямая $y = ax + b$ построена методом МНК. Для определения μ следует отождествить $\mu = -a$.

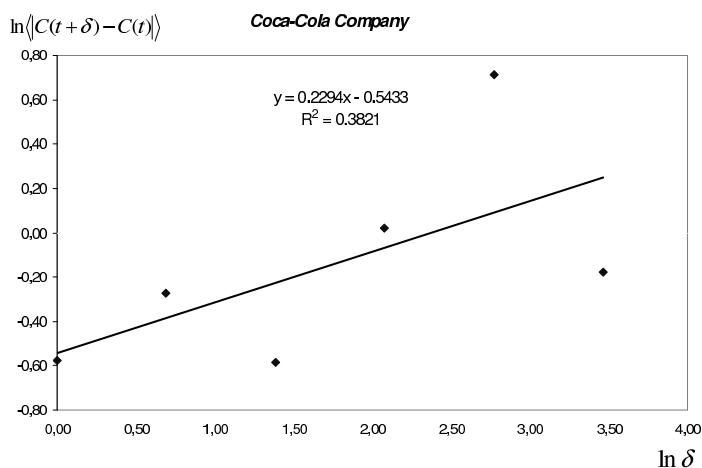


Рис. 7. РЕЗУЛЬТАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ $\langle |C(t+\delta) - C(t)| \rangle$ (где $C(t)$ — цена закрытия) и соответствующей теоретической зависимости $y = ax + b$. Для определения показателя Херста H следует отождествить $H = a$.

Для $\alpha = 0.95$ результаты оказались следующими:

$$\mu = 0.571 \pm 0.071 \quad (H_\mu = 0.429 \pm 0.071), \quad R_\mu^2 = 0.992, \\ H = 0.229 \pm 0.405, \quad R_H^2 = 0.382.$$

Как показано в [21], примерно такое же соотношение точности между μ и H сохраняется в подавляющем большинстве случаев.

6. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНДЕКСОМ ВАРИАЦИИ И СТАБИЛЬНОСТЬЮ ИССЛЕДУЕМОГО ПРОЦЕССА

Как мы видели, главным преимуществом индекса μ по сравнению с другими фрактальными показателями (в частности с показателем Херста H) является то, что соответствующая ему величина $V_f(\delta)$ имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим. Это приводит к возможности использовать его в качестве локальной характеристики, определяющей динамику исходного процесса, поскольку репрезентативный масштаб для надежного определения μ можно считать имеющим тот же порядок, что и характерный масштаб основных состояний процесса. К таким состояниям относятся флэты (периоды относительного спокойствия) и тренды (периоды относительно длительного движения вверх или вниз). Чтобы соотнести значение μ с поведением временного ряда, естественно ввести функцию $\mu(t)$ как такое значение μ , которое еще может быть вычислено с приемлемой точностью на минимальном, предшествующем t , интервале τ_μ . В случае непрерывного аргумента t , в качестве такого интервала можно было бы брать произвольно малый интервал, однако, поскольку на практике временной ряд всегда имеет минимальный масштаб δ_0 (в нашем случае δ_0 равно 1 дню), то τ_μ имеет конечную длину (в нашем случае мы берем $\tau_\mu = 32$ дня).

Мы определили $\mu(t)$ для каждой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. На рис. 8 представлен типичный фрагмент ценового ряда одной из таких компаний вместе с вычисленной для этого фрагмента функцией $\mu(t)$.

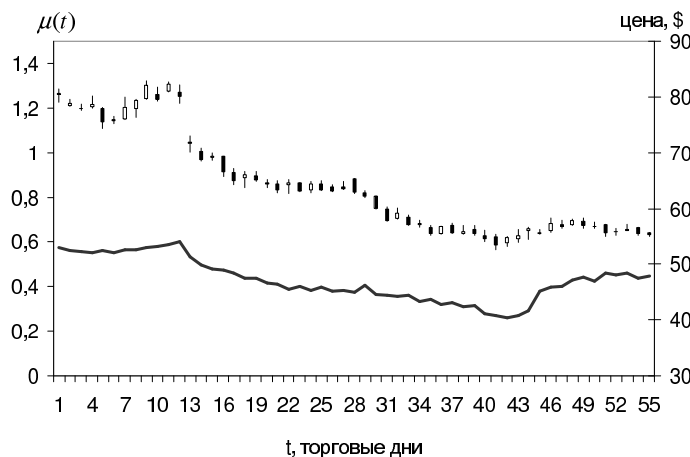


Рис. 8. Ежедневные цены акций компании GENERAL MOTORS (правая шкала, японские свечи) и график функции $\mu(t)$ (t) (левая шкала, сплошная линия)

Достаточно беглого взгляда на рис. 8, чтобы понять, что индекс μ имеет отношение к поведению временного ряда. Действительно, на интервале между 1-м и 13-м днем, где цены ведут себя относительно стабильно, $\mu(t)$ больше 0,5. Далее,

одновременно с развитием тренда на графике цен, $\mu(t)$ резко падает ниже значения $\mu = 0.5$ и, наконец, после 43-го дня, где цены находятся в промежуточном состоянии между трендом и флэтом, $\mu(t)$ возвращается к значению $\mu \approx 0.5$. Таким образом, исходный ряд оказывается тем стабильнее, чем больше значение μ . При этом, если $\mu > 0.5$, то наблюдается флэт, если $\mu < 0.5$, то наблюдается тренд и, наконец, если $\mu \sim 0.5$, то процесс находится в промежуточном состоянии. Отметим, что подобная зависимость между значением μ и поведением временного ряда подтверждается многочисленными расчетами [21]. Теоретическое обоснование этой зависимости мы приведем для случая гауссовских случайных процессов.

Мы начнем с рассмотрения винеровской модели [22], которая является простейшим случаем таких процессов. Напомним, что классическая винеровская модель броуновского движения основана на двух постулатах. Во-первых, приращения процесса на определенном интервале времени имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним, которое следует из центральной предельной теоремы и получается как результат суммирования достаточно большого числа независимых (или слабо связанных) случайных слагаемых с конечной дисперсией. Во-вторых, приращения на неперекрывающихся временных интервалах статистически независимы. Из этих постулатов следует, что

$$\langle (X(t) - X(t_0))^2 \rangle = \sigma^2 |t - t_0|, \quad (23)$$

где угловые скобки означают усреднение, $X(t)$ и $X(t_0)$ — значения процесса, соответственно, в моменты времени t и t_0 , σ^2 — дисперсия за единицу времени (в финансах параметр σ известен как волатильность). Из (23) можно получить, что этот процесс преобразуется сам в себя при изменении масштаба времени в b раз и одновременном изменении пространственного масштаба в $b/2$ раз. Фрактальная размерность графика реализации такого процесса $D = 1.5$ ($\mu = 0.5$).

Различные обобщения этой модели состоят в отказе либо от условий независимости приращений, либо от нормальности их распределений. В первом случае получаем процессы с памятью и, в частности, обобщенное броуновское движение [23, 24]. Во втором — движение Леви (Levy motion) [25–29], имеющее бесконечную дисперсию смещения. Рассмотрим модель обобщенного броуновского движения $X_H(t)$. Как известно (см., например, [2]), обобщенный броуновский процесс имеет нулевое среднее приращение и дисперсию приращений вида

$$\langle (X_H(t) - X_H(t_0))^2 \rangle = \sigma^2 |t - t_0|^{2H}, \quad (24)$$

где H показатель Херста, связанный с фрактальной размерностью графика реализации этого процесса D (и соответственно с индексом μ) соотношением $H = 2 - D = 1 - \mu$ ($0 < H < 1$). Будем использовать для удобства систему единиц, в которой $\sigma^2 = 1$ и положим $X_H(0) = 0$. Тогда на основе (24) можно получить нормированную функцию корреляций прошлых приращений $-X_H(-t)$ с будущими $X_H(t)$ (см. [2]):

$$C(t) = \langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle / \langle X_H^2(t) \rangle = 2^{2H-1} - 1. \quad (25)$$

При $H > 0.5$ ($\mu < 0.5$) корреляция положительна, т.е. тенденция к увеличению (положительное приращение) в прошлом означает в среднем тенденцию к увеличению в будущем и наоборот, тенденция к уменьшению (отрицательное приращение) в прошлом означает тенденцию к уменьшению в будущем. Такой процесс называется персистентным (сохраняющим тенденцию) и его можно рассматривать как модель тренда. При $H < 0.5$ ($\mu > 0.5$) корреляция отрицательна, т.е. в этом случае увеличение в прошлом означает вероятное уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом означает увеличение в будущем. Такой процесс называется антиперсистентным и его можно рассматривать как флэт. При $H = 0.5$ ($\mu = 0.5$) корреляция отсутствует, и мы имеем промежуточное состояние между флэтом и трендом. Таким образом, стабильность обобщенного броуновского движения определяется значением индекса μ .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на основе минимальных покрытий для одномерной функции $f(t)$ мы ввели вариацию $V_f(\delta)$ (10), а также новые фрактальные показатели: индекс вариации μ (12) и размерность минимального покрытия D_μ (13), тесно связанную с μ . Как предельное значение при $\delta \rightarrow 0$, D_μ совпадает с обычной фрактальной размерностью D . Численные расчеты, выполненные для ценовых рядов акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса, показали, что репрезентативный масштаб, необходимый для определения этих характеристик с приемлемой точностью, на два порядка меньше, чем, например, соответствующий масштаб для определения показателя Херста H . Это означает, что μ и D_μ определяются весьма точно даже на тех масштабах, на которых фрактальная геометрия в обычном смысле, как правило, уже не проявляется. Далее, для каждого момента t временного ряда мы ввели функцию $\mu(t)$ как значение μ , вычисленное на минимальном, предшествующем t , интервале τ_μ . На основе численных расчетов мы показали, что $\mu(t)$ является индикатором поведения исходного временного ряда: чем больше значение μ , тем меньше крупномасштабные флуктуации и, следовательно, тем стабильнее временной ряд. При этом случай $\mu < 0.5$ может быть интерпретирован как тренд, а случай $\mu > 0.5$ — как флэт. Теоретическую обоснованность зависимости между $\mu(t)$ и поведением исходного ряда мы показали на примере обобщенного броуновского движения. С другой стороны, величину μ можно рассматривать как показатель интенсивности мелкомасштабных флуктуаций (см. формулы (20), (21)), поскольку средняя амплитуда $\langle A(\delta) \rangle$ есть просто средняя интенсивность локальных флуктуаций на масштабе δ . Тогда зависимость между функцией $\mu(t)$ и устойчивостью временного ряда означает, в главном порядке, обратную зависимость между мелкомасштабными и крупномасштабными флуктуациями. В случае финансовых временных рядов мелкомасштабные флуктуации могут быть интерпретированы как отклик цены на внешнюю информацию. Поэтому указанная зависимость означает, что ценовой ряд в целом ведет себя тем устойчивее, чем интенсивнее цена реагирует на эту информацию.

Заметим, что случай $\mu = 0.5$ соответствует эффективному рынку, который предполагает мгновенную коррекцию цен в ответ на обновление информации и, соответственно, мгновенную реакцию действующих рационально участников рынка. Основной моделью эффективного рынка является модель броуновского движения, впервые предложенная Луисом Башелье для описания финансовых рядов в 1900 году [30] и позднее строго определенная Винером [22]. Однако широкое признание она получила уже в 30-е годы. К тому времени утвердилось мнение о том, что в целом распределение приращений цен близко к нормальному и существенные автокорреляции в рядах приращений отсутствуют [31–34]. Высшим достижением таких представлений стали удостоенные в 1997 году Нобелевской премии по экономике работы Блэйка-Шоулса [35] и Мэртона [36], позволяющие точно рассчитывать справедливую цену опционов европейского типа на акции. Одной из главных причин новых исследований поведения цен стала прокатившаяся в различных странах за последние 20 лет серия финансовых катастроф. Она разорила множество банков и инвестиционных фондов, в том числе и знаменитый LTCM, активно использовавший идеи Блэйка-Шоулса. В результате этих исследований оказалось, что те очень редкие и очень сильные колебания, которые ранее считались несущественными и отбрасывались при проверке распределений на нормальность, на самом деле являются очень важными [37–40]. Отсюда следовало, что те положения, на которых строилась основная модель, были неверными. Возможно, именно с кризисом классической теории связано возрождение в последние десятилетия интереса к техническому анализу (анализу графиков поведения цен). Как легко видеть из рис. 8, реальное поведение цен весьма сильно отличается от случая $\mu \approx 0.5$. Это связано с тем, что на цены оказывает влияние множество дополнительных факторов (в том числе и связанных с психологией инвесторов), которые весьма трудно отделить друг от друга. Их совместное действие и определяет отклонение $\mu(t)$ от значения $\mu \approx 0.5$.

В заключение следует сделать ряд замечаний обобщающего характера.

Во-первых, на основе представленного анализа в общем случае можно получить адекватное выражение для мультифрактального спектра $\zeta(q)$ [41]. В частности, для финансовых рядов $\zeta(q)$ находится из соотношения:

$$\ln\langle(A_i(\delta)/C(t_i))^q\rangle \sim \zeta(q)\ln\delta. \quad (26)$$

Его удобно использовать вместо известного соотношения (см. например [42])

$$\ln\langle(|C(t+\delta) - C(t)|/C(t))^q\rangle \sim \zeta(q)\ln\delta. \quad (27)$$

Заметим, что построенный анализ целиком применим к любым фрактальным временным рядам. Фрактальный анализ подобных рядов успешно используется, например, для прогноза землетрясений [43], ишемических заболеваний [44] и т.д.

Во-вторых, весь анализ без труда обобщается на случай n -переменных функций (см. [41]). Фрактальный анализ многомерных функций, как известно, имеет широкое применение в таких областях как теория распознавания образов [45], теория сжатия изображений [46] и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. — San-Francisco: W. H. Freeman, 1982.
2. *Feder J.* Fractals. — New York: Plenum Press, 1988.
3. *Schroeder M.* Fractals, Chaos, Power-laws. — New York: W. H. Freeman, 1991.
4. *Kantz H., Schreiber T.* Nonlinear Time Series Analysis, Cambridge Nonlinear Science Series. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
5. *Abarbanel H. D. I.* Analysis of Observed Chaotic Data. — New York: Springer, 1996.
6. *Peitgen H. O., Richter P. H.* The Beauty of Fractals. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.
7. *Hausdorff F.* Dimension und Ausseres Mass // *Mathematische Annalen*. — No 79. — 1919. — Pp. 157–179.
8. *Richardson L. F.* The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels // *General Systems Yearbook*. — No 6. — 1961. — Pp. 139–187.
9. *Mandelbrot B. B.* A Multifractal Walk Down Wall Street // *Scientific American*. — No 2. — 1999. — Pp. 70–73.
10. Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intraday analysis / U. A. Muller, M. M. Dacorogna, R. B. Olsen et al // *J. Banking Finance*. — No 14. — 1990. — Pp. 1189–1208.
11. Fractals and intrinsic time, a challenge to econometricians / U. A. Muller, M. M. Dacorogna, R. D. Dave et al // *Olsen Associates Discussion Paper*. — 1995.
12. From the bird's eye to the microscope: a survey of new stylized facts of the Intra-daily Foreign Exchange Markets / D. M. Guillaume, M. M. Dacorogna, R. D. Dave et al // *Finance Stochastics*. — No 1. — 1997. — Pp. 95–129.
13. *Mantegna R. N., Stanley H. E.* Turbulence and Financial markets // *Nature*. — No 383. — 1996. — Pp. 587–588.
14. Turbulent cascades in foreign exchange markets / S. Ghashghaie, W. Brewmann, J. Peinke et al // *Nature*. — No 381. — 1996. — Pp. 767–770.
15. An Introduction to High-Frequency Finance / M. M. Dacorogna, R. Gencay, U. A. Muller et al. — San Diego: Academic Press, 2001.
16. *Mantegna R. N., Stanley H. E.* Scaling behavior in the dynamics of an economic index // *Nature*. — No 376. — 1995. — Pp. 46–49.
17. *Gencay R., Selcuk F., Whitcher B.* Scaling properties of foreign exchange volatility // *Physica A*. — No 289. — 2001. — Pp. 249–266.
18. *Peters E. E.* Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. — New-York: Wiley, 1994.

19. *Mantegna R. N., Stanley H. E.* An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
20. Scaling and correlation in financial time series / P. Gopikrishnan, V. Plerou, Y. W. Liu et al // *Physica A.* — No 287. — 2000. — Pp. 362–373.
21. *Dubovikov M. M., Starchenko N. V., Dubovikov M. S.* Dimension of the minimal cover and fractal analysis of natural time series // *Physica A.* — 2004. — www.sciencedirect.com.
22. *Wiener N.* Differential-space // *J. Math. Phys. Math. Inst. Technol.* — No 2. — 1923. — Pp. 131–174.
23. *Mandelbrot B. B.* Une classe de processus stochastiques homothetiques a soi; application a la loi climatologique de H. E. Hurst // *C. R. Acad. Sci.* — No 260. — 1965. — Pp. 3274–3277.
24. *Mandelbrot B. B., Ness J. W. V.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // *SIAM Rev.* — No 10. — 1968. — Pp. 422–437.
25. *Mandelbrot B. B.* Sur certains prix speculatifs: faits empiriques et modele base sur des processus stables additifs de Paul Levy // *C. R. Acad. Sci.* — No 254. — 1962. — Pp. 3968–3970.
26. *Mandelbrot B. B.* The variation of certain speculative prices // *J. Business.* — No 36. — 1963. — Pp. 394–419.
27. *Fama E. F.* Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis // *J. Business.* — No 36. — 1963. — Pp. 420–429.
28. *Fama E. F.* The behavior of stock-market prices // *J. Business.* — No 38. — 1965. — Pp. 34–105.
29. *Mandelbrot B. B.* The variation of some other speculative prices // *J. Business.* — No 40. — 1967. — Pp. 393–413.
30. *Bachelier L.* Theory of Speculation // *Random Character of Stock Market Prices* / Ed. by P. H. Cootner. — Cambridge: The MIT Press, 1964.
31. *Kendall M.* The Analysis of Economic Time Series // *Random Character of Stock Market Prices* / Ed. by P. H. Cootner. — Cambridge: The MIT Press, 1964.
32. *Osborne M. F.* Brownian motion in the stock market // *Random Character of Stock Market Prices* / Ed. by P. H. Cootner. — Cambridge: The MIT Press, 1964.
33. *Cootner P. H.* *Random Character of Stock Market Prices.* — Cambridge: The MIT Press, 1964.
34. *Sharp W. F.* *Portfolio Theory and Capital Markets.* — N.Y.: McGraw-Hill, 1970.
35. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // *Journal of Political Economy.* — No 3. — 1973. — Pp. 637–659.
36. *Merton R.* Theory of Rational Option Pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science.* — No 4. — 1973. — Pp. 141–183.
37. *Friedman B. M., Laibson D. I.* Economic Implications of Extraordinary Movements in Stock prices // *Brookings Papers on Economic Activity.* — No 2. — 1989.
38. *Siller R.* *Market Volatility.* — Cambridge: The MIT Press, 1989.
39. *Turner A. L., Weigel E. J.* An Analysis of Stock Market Volatility / Russell Research Commentaries. — Tacoma: Frank Russell Company, 1990.
40. *Lo A., Mackinlay A. C.* Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test // *Review of Financial Studies.* — No 1. — 1988.
41. *Дубовиков М. М., Старченко Н. В.* Индекс вариации и его приложение к анализу фрактальных структур // *Научный альманах Гордон.* — № 1. — 2003. — С. 5–33.
42. *Schmitt F., Schertzer D., Lovejoy S.* Multifractal analysis of foreign exchange data // *Appl. Stochastic Models Data Anal.* — No 15. — 1999. — Pp. 29–53.
43. Possibility between earthquake and explosion seismogram differentiation by discrete stochastic non-Markov processes and local Hurst exponent analysis / R. Yulmetyev, F. Gafarov, P. Hanggi et al // *Phys. Rev. E.* — No 64. — 2001. — P. 066132.
44. Scale Invariance in the Nonstationarity of Human Heart Rate / P. Bernaola-Galvan, P. C. Ivanov, A. Luis et al // *Physical Review Letters.* — Vol. 87, No 16. —

2001. — Pp. 168105–1 – 168105–4.
45. *Chen C., Deponte J. S., Fox M. D.* Fractal feature analysis in medical imaging // IEEE Trans. Med. Imaging. — No 8. — 1989. — Pp. 133–142.
46. *Бондаренко В. А., Дольников В. Л.* Фрактальное сжатие изображений по Барнсли-Слоан // Автоматика и телемеханика. — № 5. — 1994. — С. 12–20.

UDC 519.216;519.216.21;519.216.3

Dimension of the Minimal Cover and Local Analysis of Fractal Time Series

М. М. Dubovikov^{*}, A. V. Kryanev[†], N. V. Starchenko^{*}

^{*} *Financial Company "INTRAST"*

B. Kommunisticheskaya, 36-1, Moscow, 109004, Russia

[†] *MEPHI*

Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia

On the basis of the minimal covers we introduce new fractal characteristics: the dimension of minimal covers D_μ , the variation index μ related to D_μ . The latter extend the applicability of fractal analysis to study of various natural, technological and social chaotic processes. In particular, for the case of financial series, it is shown that the minimal scale τ_μ which is necessary for determining μ with an acceptable accuracy, is two orders smaller than the one for computing the Hurst index H . This allows us to consider μ as a local fractal characteristic and to show that $\mu(t)$ is related to the stability of underlying processes. We introduce a new expression for the multifractal spectrum $\zeta(q)$. The generalization to the case of n -dimensional functions is presented.